

## О единственности решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с линейными граничными условиями, I

В.Д.Пономарев

**Аннотация.** Доказываются теоремы единственности решения краевой задачи

$$\begin{aligned} x' &= h(t, x, y), & y' &= f(t, x, y), \\ a_1x(a) + a_2x(b) + a_3y(a) + a_4y(b) + a_5 &= 0, \\ b_1x(a) + b_2x(b) + b_3y(a) + b_4y(b) + b_5 &= 0. \end{aligned}$$

УДК 517.927

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y), \quad (1)$$

со следующими линейными краевыми условиями:

$$\begin{aligned} L_1 &= a_1x(a) + a_2x(b) + a_3y(a) + a_4y(b) + a_5 = 0, \\ L_2 &= b_1x(a) + b_2x(b) + b_3y(a) + b_4y(b) + b_5 = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где функции  $h, f : I \times R^2 \rightarrow R$ ,  $I = [a, b]$ ,  $-\infty < a < b < +\infty$ , удовлетворяют условию Каратеодори [1],  $a_i, b_i \in R$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Положим  $\Delta_{ij} = a_ib_j - a_jb_i$ , где  $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ . Очевидно  $\Delta_{ij} = -\Delta_{ji}$ . Непосредственной подстановкой проверяется справедливость равенства:

$$\Delta_{12}\Delta_{34} + \Delta_{13}\Delta_{43} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0. \quad (3)$$

Ниже будут приведены достаточные условия единственности решения краевой задачи (1)-(2), обобщающие соответствующие результаты из работ [2]-[3].

В дальнейшем нам потребуются следующие условия и теорема.

$M_1$ )  $h(t, x, y)$  строго возрастает по  $y \in R$  при фиксированных  $(t, x) \in I \times R$ ;

$M_2$ )  $h(t, x, y)$  возрастает по  $y \in R$  при фиксированных  $(t, x) \in I \times R$ ;

$M_3$ )  $f(t, x, y)$  строго возрастает по  $x \in R$  при фиксированных  $(t, y) \in I \times R$ ;

$M_4$ )  $f(t, x, y)$  возрастает по  $x \in R$  при фиксированных  $(t, y) \in I \times R$ .

Для любого  $M \in (0, \infty)$  найдутся  $k_i \in L(I)$ ,  $i = 1, \dots, 8$  такие, что для любых  $(t, x_1, x_2, y_1, y_2) \in I \times [-M, M]^4$  выполняются условия

$$E_1) \quad h(t, x_1, y_1) - h(t, x_2, y_1) \leq K_1(t)(x_1 - x_2), \quad x_1 \geq x_2;$$

$$E_2) \quad h(t, x_1, y_1) - h(t, x_2, y_1) \leq K_2(t)(x_1 - x_2), \quad x_1 \leq x_2;$$

$$E_3) \quad h(t, x_1, y_1) - h(t, x_2, y_1) \geq K_3(t)(x_1 - x_2), \quad x_1 \geq x_2;$$

$$E_4) \quad h(t, x_1, y_1) - h(t, x_2, y_1) \geq K_4(t)(x_1 - x_2), \quad x_1 \leq x_2;$$

$$E_5) \quad f(t, x_1, y_1) - f(t, x_1, y_2) \leq K_5(t)(y_1 - y_2), \quad y_1 \geq y_2;$$

$$E_6) \quad f(t, x_1, y_1) - f(t, x_1, y_2) \leq K_6(t)(y_1 - y_2), \quad y_1 \leq y_2;$$

$$E_7) \quad f(t, x_1, y_1) - f(t, x_1, y_2) \geq K_7(t)(y_1 - y_2), \quad y_1 \geq y_2;$$

$$E_8) \quad f(t, x_1, y_1) - f(t, x_1, y_2) \geq K_8(t)(y_1 - y_2), \quad y_1 \leq y_2.$$

Пусть  $(x_1(t), y_1(t)), (x_2(t), y_2(t)), t \in I$  – решения теоремы (1).

$A_1)$  Для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) > y_2(t_0)$  следует  $x_1(b) > x_2(b)$  и  $y_1(b) \geq y_2(b)$ ;

$A_2)$  для любого  $t_0 \in (a, b]$  из  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) < y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) > x_2(a)$  и  $y_1(a) < y_2(a)$ ;

$A_3)$  для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) > y_2(t_0)$  следует  $x_1(b) > x_2(b)$  и  $y_1(b) > y_2(b)$ ;

$A_4)$  для любого  $t_0 \in (a, b]$  из  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) < y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) > x_2(a)$  и  $y_1(a) \leq y_2(a)$ ;

$A_5)$  для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) > x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) = y_2(t_0)$  следует  $x_1(b) \geq x_2(b)$  и  $y_1(b) > y_2(b)$ ;

$A_6)$  для любого  $t_0 \in (a, b]$  из  $x_1(t_0) > x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) = y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) > x_2(a)$  и  $y_1(a) < y_2(a)$ ;

$A_7)$  для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) > x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) = y_2(t_0)$  следует  $x_1(b) > x_2(b)$  и  $y_1(b) > y_2(b)$ ;

$A_8)$  для любого  $t_0 \in (a, b]$  из  $x_1(t_0) > x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) = y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) \geq x_2(a)$  и  $y_1(a) < y_2(a)$ ;

$A_9)$  для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) > x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) < y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) > x_2(a)$  и  $y_1(a) < y_2(a)$ ;

$A_{10})$  для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) > x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) > y_2(t_0)$  следует  $x_1(b) > x_2(b)$  и  $y_1(b) > y_2(b)$ ;

$A_{11})$  для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) \geq x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) > y_2(t_0)$  следует  $x_1(b) \geq x_2(b)$  и  $y_1(b) > y_2(b)$ ;

$A_{12})$  для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) > x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) \leq y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) > x_2(a)$  и  $y_1(a) \leq y_2(a)$ ;

$A_{13})$  для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) > x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) \geq y_2(t_0)$  следует  $x_1(b) > x_2(b)$  и  $y_1(b) \geq y_2(b)$ ;

$A_{14})$  для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) \geq x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) < y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) \geq x_2(a)$  и  $y_1(a) < y_2(a)$ ;

$A_{15})$  для любого  $t_0 \in (a, b]$  из  $x_1(t_0) < x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) = y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) < x_2(a)$  и  $y_1(a) > y_2(a)$ ;

$A_{16})$  для любого  $t_0 \in (a, b]$  из  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) > y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) < x_2(a)$  и  $y_1(a) > y_2(a)$ ;

$A_{17})$  для любого  $t_0 \in (a, b]$  из  $x_1(t_0) < x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) = y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) \leq x_2(a)$  и  $y_1(a) > y_2(a)$ ;

$A_{18}$ ) для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) > y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) < x_2(a)$  и  $y_1(a) \geq y_2(a)$ ;

$A_{19}$ ) для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) < x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) > y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) < x_2(a)$  и  $y_1(a) > y_2(a)$ ;

$A_{20}$ ) для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) \leq x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) > y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) \leq x_2(a)$  и  $y_1(a) > y_2(a)$ ;

$A_{21}$ ) для любого  $t_0 \in [a, b]$  из  $x_1(t_0) < x_2(t_0)$  и  $y_1(t_0) \geq y_2(t_0)$  следует  $x_1(a) < x_2(a)$  и  $y_1(a) \geq y_2(a)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $(x_1(t), y_1(t)), (x_2(t), y_2(t)), t \in I$  – решения системы (1). Тогда из условий

- 1)  $M_1, M_4, E_3, E_4, E_8$  следует  $A_1$ ;
- 2)  $M_1, M_4, E_1, E_2, E_6$  следует  $A_2$ ;
- 3)  $M_1, M_4, E_3, E_4, E_7$  следует  $A_3$ ;
- 4)  $M_1, M_4, E_1, E_2, E_7$  следует  $A_4$ ;
- 5)  $M_2, M_3, E_4, E_7, E_8$  следует  $A_5$ ;
- 6)  $M_2, M_3, E_1, E_7, E_8$  следует  $A_6$ ;
- 7)  $M_2, M_3, E_3, E_7, E_8$  следует  $A_7$ ;
- 8)  $M_2, M_3, E_2, E_7, E_8$  следует  $A_8$ ;
- 9)  $M_2, M_4, E_1, E_8$  следует  $A_9$ ;
- 10)  $M_2, M_4, E_3, E_7$  следует  $A_{10}$ ;
- 11)  $M_2, M_3, E_4, E_7$  следует  $A_{11}$ ;
- 12)  $M_2, M_4, E_1, E_7$  следует  $A_{12}$ ;
- 13)  $M_2, M_4, E_3, E_8$  следует  $A_{13}$ ;
- 14)  $M_2, M_4, E_2, E_8$  следует  $A_{14}$ ;
- 15)  $M_2, M_3, E_2, E_5, E_8$  следует  $A_{15}$ ;
- 16)  $M_1, M_4, E_3, E_4, E_5$  следует  $A_{16}$ ;
- 17)  $M_2, M_3, E_3, E_5, E_6$  следует  $A_{17}$ ;
- 18)  $M_1, M_4, E_1, E_4, E_6$  следует  $A_{18}$ ;
- 19)  $M_2, M_4, E_4, E_5$  следует  $A_{19}$ ;
- 20)  $M_2, M_3, E_3, E_5$  следует  $A_{20}$ ;
- 21)  $M_2, M_4, E_4, E_6$  следует  $A_{21}$ .

Доказательство теоремы дано в [4].

Приведем теоремы в терминах поведения решений системы (1) ( $A_1$ - $A_{21}$ ), дающие достаточные условия единственности решения краевой задачи (1)-(2).

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия  $(A_1 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee A_4) \wedge (A_9 \vee A_{12}) \wedge A_{13} \wedge A_{19}$ ,  $\Delta_{12} \neq 0$ ,  $\varepsilon \Delta_{13} \geq 0$ ,  $\varepsilon \Delta_{23} \geq 0$ ,  $\varepsilon \Delta_{24} \geq 0$ ,  $\varepsilon \Delta_{43} \geq 0$ , где  $\varepsilon = \text{sign } \Delta_{12}$ ,  $a_3 \cdot b_3 \neq 0$ . Тогда краевая задача (1)-(2) не может иметь более одного решения.

**Доказательство.** Предположим, что краевая задача (1)-(2) имеет два решения:  $(x_1(t), y_1(t))$  и  $(x_2(t), y_2(t))$ . Тогда функции

$$u(t) = x_1(t) - x_2(t), \quad v(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} a_1 u(a) + a_2 u(b) + a_3 v(a) + a_4 v(b) &= 0, \\ b_1 u(a) + b_2 u(b) + b_3 v(a) + b_4 v(b) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Из системы (4) имеем

$$u(a) = \frac{\Delta_{23}v(a) + \Delta_{24}v(b)}{\Delta_{12}}, \quad (5)$$

$$u(b) = \frac{\Delta_{31}v(a) + \Delta_{41}v(b)}{\Delta_{12}}. \quad (6)$$

Рассмотрим следующие соотношения:

- 1)  $\Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2 = 0$ ,  $\Delta_{31}^2 + \Delta_{41}^2 = 0$ ;
- 2)  $\Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2 \neq 0$ ,  $\Delta_{31}^2 + \Delta_{41}^2 = 0$ ;
- 3)  $\Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2 = 0$ ,  $\Delta_{31}^2 + \Delta_{41}^2 \neq 0$ ;
- 4)  $\Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2 \neq 0$ ,  $\Delta_{31}^2 + \Delta_{41}^2 \neq 0$ .

Из соотношения 1 имеем  $u(a) = u(b) = 0$ , что в силу теоремы 2 из работы [5] дает  $u(t) = v(t) = 0$  для любых  $t \in I$ . Доказательство для соотношений 2-4 проходит аналогично. Разберем, например, соотношение 4. Для этого рассмотрим следующие случаи:

- a)  $\Delta_{23} = 0$ ,  $\Delta_{24} \neq 0$ ,  $\Delta_{31} \neq 0$ ,  $\Delta_{41} = 0$ ;
- b)  $\Delta_{23} = 0$ ,  $\Delta_{24} \neq 0$ ,  $\Delta_{31} = 0$ ,  $\Delta_{41} \neq 0$ ;
- c)  $\Delta_{23} = 0$ ,  $\Delta_{24} \neq 0$ ,  $\Delta_{31} \neq 0$ ,  $\Delta_{41} \neq 0$ ;
- d)  $\Delta_{23} \neq 0$ ,  $\Delta_{24} = 0$ ,  $\Delta_{31} \neq 0$ ,  $\Delta_{41} = 0$ ;
- e)  $\Delta_{23} = 0$ ,  $\Delta_{24} = 0$ ,  $\Delta_{31} = 0$ ,  $\Delta_{41} \neq 0$ ;
- f)  $\Delta_{23} \neq 0$ ,  $\Delta_{24} = 0$ ,  $\Delta_{31} \neq 0$ ,  $\Delta_{41} = 0$ ;
- g)  $\Delta_{23} \neq 0$ ,  $\Delta_{24} \neq 0$ ,  $\Delta_{31} \neq 0$ ,  $\Delta_{41} = 0$ ;
- h)  $\Delta_{23} \neq 0$ ,  $\Delta_{24} \neq 0$ ,  $\Delta_{31} = 0$ ,  $\Delta_{41} \neq 0$ ;
- i)  $\Delta_{23} \neq 0$ ,  $\Delta_{24} \neq 0$ ,  $\Delta_{31} \neq 0$ ,  $\Delta_{41} \neq 0$ .

Предположим, что  $\varepsilon = 1$  (случай  $\varepsilon = -1$  рассматривается аналогично). Тогда

$$\Delta_{12} > 0, \quad \Delta_{13} \geq 0, \quad \Delta_{23} \geq 0, \quad \Delta_{24} \geq 0, \quad \Delta_{43} \geq 0.$$

Покажем, что  $\Delta_{14} \geq 0$ . Если  $\Delta_{14} < 0$ , то из

$$\Delta_{14} \cdot \Delta_{23} = -(\Delta_{12} \cdot \Delta_{34} + \Delta_{13} \cdot \Delta_{42}) \geq 0$$

следует  $\Delta_{23} = 0$ . Поэтому

$$\Delta_{12} \cdot \Delta_{34} + \Delta_{13} \cdot \Delta_{42} = 0,$$

и отсюда  $\Delta_{12} \cdot \Delta_{34} = 0$  и  $\Delta_{13} \cdot \Delta_{42} = 0$ . Но  $\Delta_{23}^2 + \Delta_{24}^2 \neq 0$  и поэтому  $\Delta_{34} = 0$ ,  $\Delta_{23} = 0$  и  $\Delta_{13} = 0$ . Из двух равенств следует  $\Delta_{12} = 0$  при условии  $a_3 b_3 \neq 0$ . Следовательно,  $\Delta_{14} \geq 0$ .

Рассмотрим случай a). Тогда  $\Delta_{12} > 0$ ,  $\Delta_{13} > 0$ ,  $\Delta_{14} = 0$ ,  $\Delta_{23} = 0$ ,  $\Delta_{24} > 0$ ,  $\Delta_{43} \geq 0$ . Из (3) следует  $\Delta_{34} > 0$ , что противоречит  $\Delta_{43} \geq 0$ .

Рассмотрим случай c). Тогда  $\Delta_{12} > 0$ ,  $\Delta_{13} > 0$ ,  $\Delta_{14} > 0$ ,  $\Delta_{23} = 0$ ,  $\Delta_{24} > 0$ ,  $\Delta_{43} \geq 0$ . Из (3) следует  $\Delta_{34} > 0$ , что противоречит  $\Delta_{43} \geq 0$ .

Рассмотрим случай g). Тогда  $\Delta_{12} > 0$ ,  $\Delta_{13} > 0$ ,  $\Delta_{14} = 0$ ,  $\Delta_{23} > 0$ ,  $\Delta_{24} > 0$ ,  $\Delta_{43} \geq 0$ . Из (3) следует  $\Delta_{34} > 0$ , что противоречит  $\Delta_{43} \geq 0$ .

Рассмотрим случай i) (остальные разбираются аналогично). Из (5), (6) имеем

$$u(a) = \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{12}}(v(a) + \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b)), \quad (7)$$

$$u(b) = \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}}(v(a) + \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{31}}v(b)). \quad (8)$$

Не теряя общности (путем переобозначения), можно считать, что  $u(a) \geq 0$ . Для случая i) имеем

$$\Delta_{12} > 0, \quad \Delta_{13} > 0, \quad \Delta_{14} > 0, \quad \Delta_{23} > 0, \quad \Delta_{24} > 0, \quad \Delta_{43} \geq 0. \quad (9)$$

Из (3) и (9) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{12} \cdot \Delta_{34} + \Delta_{14} \cdot \Delta_{23} &= \Delta_{13} \cdot \Delta_{24}, \\ \Delta_{14} \cdot \Delta_{23} &\geq \Delta_{13} \cdot \Delta_{24}, \\ \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{13}} &\geq \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}, \\ \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{31}} &\geq \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как  $u(a) \geq 0$ , то из (7), (9) получаем

$$v(a) + \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b) \geq 0$$

и рассмотрим два случая. Пусть

$$v(a) + \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b) > 0. \quad (11)$$

Из (7) следует  $u(a) > 0$ . Пусть  $v(a) \geq 0$ . Из  $A_{13}$  следует  $u(b) > 0$  и  $v(b) \geq 0$ . Но из (8), (9) имеем  $u(b) \leq 0$ , что противоречит  $u(b) > 0$ .

Пусть  $v(a) \leq 0$ . Тогда из (11) имеем  $v(b) > 0$ . Из (10) поэтому получаем

$$v(a) + \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{31}}v(b) \geq v(a) + \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b) > 0.$$

Из (8) имеем  $u(b) < 0$ . Итак, имеем

$$u(a) > 0, \quad v(a) \leq 0, \quad u(b) < 0, \quad v(b) > 0.$$

Из  $A_{19}$  следует  $u(a) < 0$  и  $v(a) > 0$ , что противоречиво.

Рассмотрим случай

$$v(a) + \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b) = 0, \quad (12)$$

$$v(a) = -\frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b).$$

В силу (7) имеем  $u(a) = 0$ . Из (8) и (12) получаем

$$\begin{aligned} u(b) &= \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}}(-\frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}}v(b) + \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{31}}v(b)) = \\ &= \frac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}}(\frac{\Delta_{41}}{\Delta_{31}} - \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}})v(b). \end{aligned} \quad (13)$$

Из (9), (10) имеем

$$\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{12}} \left( \frac{\Delta_{41}}{\Delta_{31}} - \frac{\Delta_{24}}{\Delta_{23}} \right) \leq 0. \quad (14)$$

Рассмотрим три случая в зависимости от знака  $v(b)$ . Пусть  $v(b) = 0$ . Из (12), (13)  $u(b) = 0$ ,  $v(a) = 0$ . Так как  $u(a) = 0$ , то по теореме 2 из работы [5] получаем противоречие.

Пусть  $v(b) > 0$ . Тогда из (12)-(14) имеем

$$u(a) = 0, \quad v(a) < 0, \quad u(b) \leq 0, \quad v(b) > 0.$$

Случая  $u(a) = 0$ ,  $u(b) = 0$  по теореме из работы быть не может. Следовательно,

$$u(a) = 0, \quad v(a) < 0, \quad u(b) < 0, \quad v(b) > 0.$$

Из  $A_{19}$  получаем  $u(a) < 0$  и  $v(a) > 0$ , что противоречиво.

Пусть  $v(b) < 0$ . Тогда из (12)-(14) имеем

$$u(a) = 0, \quad v(a) > 0, \quad u(b) \geq 0, \quad v(b) < 0,$$

что согласно теореме 2 из работы [5] приводит к рассмотрению случая

$$u(a) = 0, \quad v(a) > 0, \quad u(b) > 0, \quad v(b) < 0.$$

Из  $A_1 \vee A_3$  получаем  $u(b) > 0$ ,  $v(b) \geq 0$ , что противоречиво.

Следовательно, предположение о том, что краевая задача (1)-(2) имеет два различных решения, приводит к противоречию во всех возможных случаях, а поэтому краевая задача (1)-(2) может иметь не более одного решения. Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия

$$(A_1 \vee A_3) \wedge (A_2 \vee A_4) \wedge (A_9 \vee A_{12}) \wedge A_{13} \wedge A_{19},$$

$\Delta_{12} \neq 0$ ,  $\varepsilon \Delta_{13} \geq 0$ ,  $\varepsilon \Delta_{14} \geq 0$ ,  $\varepsilon \Delta_{23} \geq 0$ ,  $\varepsilon \Delta_{24} \geq 0$ ,  $\varepsilon \Delta_{43} \geq 0$ , где  $\varepsilon = \text{sign } \Delta_{12}$ . Тогда краевая задача (1)-(2) не может иметь более одного решения.

**Доказательство.** Так как условие  $a_3 b_3 \neq 0$  использовано в доказательстве теоремы 2 только для установления знака  $\Delta_{14}$ , то это условие отсутствует в формулировке теоремы 3, а присутствует условие на знак  $\Delta_{14}$ . В остальном доказательство теоремы 3 совпадает с доказательством теоремы 2.

Введем следующее определение.

**Определение.** Будем говорить, что функция  $H : R^4 \rightarrow R$  имеет тип монотонности  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$  и записывать это в виде  $H \in M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ , где  $\sigma_i \in \{1, -1\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , если при  $\sigma_i = 1$  ( $\sigma_i = -1$ ) функция  $H$  не убывает (не возрастает) по  $i$ -му аргументу на  $R^4$  при фиксированных остальных аргументах.

**Замечание.** Выясним, какой тип монотонности имеют  $L_1$  и  $L_2$  при условиях теоремы 2. Ограничимся случаем, когда все  $a_i \neq 0$ ,  $b_i \neq 0$ . Мы можем, очевидно, считать, что  $a_1 > 0$  и  $b_1 > 0$ . Пусть  $\varepsilon = 1$  и предположим, что  $a_3 > 0$ . Тогда из  $\Delta_{13} \geq 0$  следует, что  $b_3 > 0$ . Из  $\Delta_{12} > 0$  следует  $b_2 > \frac{b_1}{a_1} a_2$ , а из  $\Delta_{23} \geq 0$  вытекает  $b_2 \leq \frac{b_3}{a_3} a_2$ , но из  $\Delta_{13} \geq 0$  получаем  $\frac{b_3}{a_3} \geq \frac{b_1}{a_1}$ , следовательно, если бы  $a_2 < 0$ , то получили

бы противоречие, поэтому  $a_2 > 0$  и, значит,  $b_2 > 0$ . Нетрудно показать, что  $a_4 > 0$  и  $b_4 > 0$ .

Дальнейший анализ, проведенный и для  $\varepsilon = -1$ , показывает, что возможны следующие типы монотонности  $L_1$  и  $L_2$ . В скобках для каждого случая указывается восемь чисел, соответствующих последовательности коэффициентов  $(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$  и иллюстрирующих конкретную реализацию данного типа монотонности. Если приведены два набора коэффициентов, то первый соответствует  $\varepsilon = 1$ , а второй  $\varepsilon = -1$ .

1.  $L_1 \in M(1, 1, 1, 1), L_2 \in M(1, 1, 1, 1), (4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4, 1, 1, 1, 1)$ ;
2.  $L_1 \in M(1, 1, -1, 1), L_2 \in M(1, 1, 1, 1), (3, 2, -1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ;
3.  $L_1 \in M(1, 1, -1, -1), L_2 \in M(1, 1, 1, 1), (2, 1, -2, -1, 1, 1, 1, 1)$ ;
4.  $L_1 \in M(1, -1, -1, -1), L_2 \in M(1, 1, 1, 1), (4, -1, -3, -2, 1, 1, 1, 1)$ ;
5.  $L_1 \in M(1, 1, 1, 1), L_2 \in M(1, 1, -1, 1), (1, 2, 1, 3, 1, 1, -1, 1)$ ;
6.  $L_1 \in M(1, 1, -1, 1), L_2 \in M(1, 1, -1, 1), (3, 2, -4, 1, 1, 1, -1, 1), (2, 3, -1, 4, 1, 1, -1, 1)$ ;
7.  $L_1 \in M(1, 1, -1, -1), L_2 \in M(1, 1, -1, 1), (2, 1, -3, -1, 1, 1, -1, 1)$ ;
8.  $L_1 \in M(1, -1, -1, -1), L_2 \in M(1, -1, 1, 1), (1, -1, -2, -2, 1, 1, -1, 1, 1)$ ;
9.  $L_1 \in M(1, 1, 1, 1), L_2 \in M(1, 1, -1, -1), (1, 2, 1, 2, 1, 1, -1, -1)$ ;
10.  $L_1 \in M(1, 1, -1, 1), L_2 \in M(1, 1, -1, -1), (2, 3, -1, 4, 1, 1, -1, 1)$ ;
11.  $L_1 \in M(1, 1, -1, -1), L_2 \in M(1, 1, -1, -1), (2, 1, -3, -4, 1, 1, -1, -1), (4, 3, -2, -1, 1, 1, -1, -1)$ ;
12.  $L_1 \in M(1, -1, -1, -1), L_2 \in M(1, 1, -1, -1), (1, -3, -2, -3, 1, 1, -1, -1)$ ;
13.  $L_1 \in M(1, 1, 1, 1), L_2 \in M(1, -1, -1, -1), (1, 3, 1, 2, 1, -1, -1, -1)$ ;
14.  $L_1 \in M(1, 1, -1, 1), L_2 \in M(1, -1, -1, -1), (2, 2, -1, 1, 1, -1, -1, -1)$ ;
15.  $L_1 \in M(1, 1, -1, -1), L_2 \in M(1, -1, -1, -1), (3, 2, -2, -1, 1, -1, -1, -1)$ ;
16.  $L_1 \in M(1, -1, -1, -1), L_2 \in M(1, -1, -1, -1), (1, -4, -2, -3, 1, -1, -1, -1), (4, -1, -3, -2, 1, -1, -1, -1)$ .

Случаи 2, 3, 4, 7, 8, 12 получаются при  $\varepsilon = 1$ , случаи 5, 9, 10, 13, 14, 15 – при  $\varepsilon = -1$ , а 1, 6, 11, 16 – и при  $\varepsilon = 1$ , и при  $\varepsilon = -1$ .

## Список литературы

- [1] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1953, 474 с.
- [2] Гудков В.В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1978, 183 с.
- [3] Пономарев В.Д. О единственности решения некоторых краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка // Латв.мат.ежегодник. Рига: Зинатне, 1974, вып.14, 157-176.
- [4] Ponomarev V. On the behavior or solutions of a system of two first order ordinary differential equations // Latv.Univ.Zinātn.Raksti. Matemātika. Diferenciālvienādojumi. 1997, v. 605, 14-25.

- [5] Пономарев В.Д. О единственности решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка // *Matemātika. Diferenciālvienādojumi: zinātniskie raksti. 1.sējums*. Rīga: LU MII, 2000, 80-85.

**V. Ponomarev. About uniqueness of a solution of boundary value problems for a system of two first-order differential equations with linear boundary conditions, I.**

**Summary.** Theorems of uniqueness of a solution of the boundary value problems

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y),$$

$$a_1x(a) + a_2x(b) + a_3y(a) + a_4y(b) + a_5 = 0,$$

$$b_1x(a) + b_2x(b) + b_3y(a) + b_4y(b) + b_5 = 0$$

are proved in the paper.

1991 MSC 34B99

**V. Ponomarjovs. Par robežproblēmu atrisinājuma unitāti divu pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu sistēmai ar lineāriem robežnosacījumiem, I.**

**Anotācija.** Rakstā pierādītas unitātes teorēmas robežproblēmai

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y),$$

$$a_1x(a) + a_2x(b) + a_3y(a) + a_4y(b) + a_5 = 0,$$

$$b_1x(a) + b_2x(b) + b_3y(a) + b_4y(b) + b_5 = 0.$$

Institute of Mathematics  
and Computer Science,  
University of Latvia  
Riga, Rainis blvd 29

Received 11.12.2003